

Il moto in campo gravitazionale

Fino al 1600 con Galileo Galilei e l'invenzione del cannocchiale le osservazioni venivano fatte normalmente ad occhio nudo. In Aristotele e Tolomeo il lato sperimentale non compare mai. Il moto dei pianeti dalla terra (moto retrogrado) non era infatti facile da spiegare. Tolomeo pose un'ipotesi di questo tipo: i pianeti si muovono su circonferenze le quali a loro volta si muovono intorno alla terra. Il sistema tolemaico è del 180 d.C., la teoria Eliocentrica appartiene a cavallo tra 1400 e 1500. Aumentando la velocità sull'epiciclo si vedono il numero di inversioni del moto. Copernico si avvicina alla verità mettendo il sole al centro, ma le orbite circolari sono l'errore del sistema. Nel frattempo il re di Danimarca fece costruire un osservatorio nel mezzo del mare del Nord, relegando per vent'anni degli astronomi a fare osservazioni. A Tycho Brahe si devono 2 meriti: aver catalogato bene queste informazioni e avere scelto Keplero quale proprio assistente. Con Keplero le orbite diventano ellittiche.

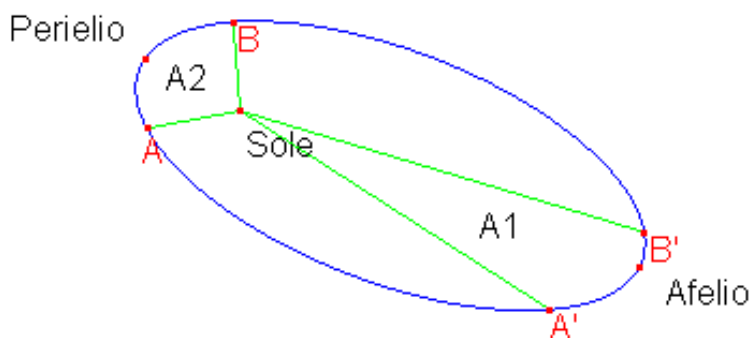
I Legge di Keplero:

I pianeti percorrono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei due fuochi.

Il punto dell'orbita più distante dal sole è detto afelio, quello più vicino perielio.

II Legge di Keplero

Il raggio vettore tra il centro del sole ed uno qualsiasi dei pianeti descrive aree uguali in intervalli di tempo uguali.



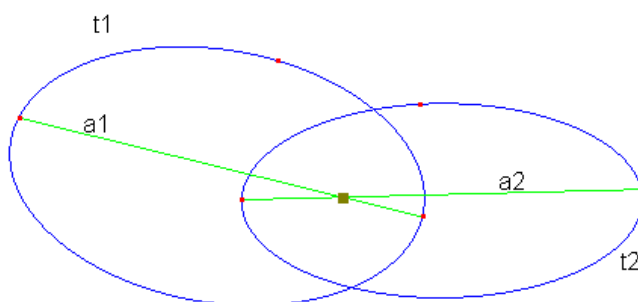
Se $A1 = A2$ allora $\Delta t(AB) = \Delta t(A'B')$

Da ciò possiamo dedurre che la velocità nei punti più vicini al sole è maggiore rispetto a quella nei punti più lontani

III Legge di Keplero

I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite ellittiche.

Ovvero:



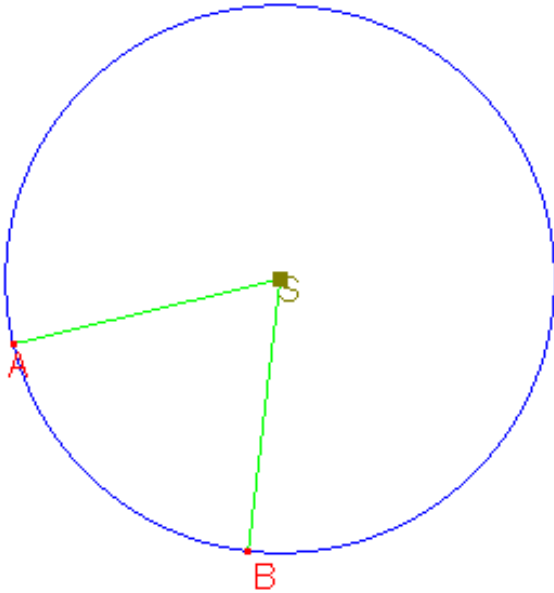
$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$$

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Essendo questa proprietà valida per tutti i pianeti del sistema solare, possiamo quindi dire che $\frac{T^2}{a^3} = k$, il valore di k cambia a seconda del sistema in cui ci troviamo (es. Terra – Luna k diverso da Terra – Sole)

Possiamo poi dimostrare che la seconda legge è un riscontro della conservazione del momento angolare.

Approssimo l'orbita ad una retta con il sole nel centro



Sappiamo che:

$$\Delta A = \frac{\overline{AB} * r}{2}$$

approssimando ABS ad un triangolo, la cui altezza è il raggio.

Ma \overline{AB} è l'accelerazione angolare per il raggio

$$\overline{AB} = \alpha * r = \omega \Delta t r.$$

L'area risulta quindi:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \omega \Delta t r^2$$

Posso quindi definire $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega r^2$ la **velocità areolare** che si mantiene sempre costante poiché il

modulo del suo momento angolare è: $L = m r^2 \omega$, da

$$\text{cui } r^2 \omega = \frac{L}{m}.$$

Sostituendo abbiamo $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$.

Poiché per la conservazione del momento angolare abbiamo:

$$M \Delta t = \Delta L \text{ se } M \text{ è costante, è per forza } \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0$$

Se $L = 0 \rightarrow M = 0$ quindi il momento delle forze è nullo.

Poiché $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ e $|\vec{M}| = Fb$ abbiamo due possibilità perché M sia uguale a 0.

$F = 0$ ma se $F = 0$ il sistema non si muoverebbe, quindi il braccio deve essere per forza uguale a zero, il che $b = 0$

ci dice che la forza è centrale ed agisce direttamente sul pianeta.

Forza di Gravitazione universale

Approssimando le leggi di Keplero con le orbite circolari otteniamo che:

1) Il sole è il centro

2) Il moto è circolare uniforme

$$3) \frac{T^2}{r^3} = k$$

Nel caso 2 se il moto è circolare uniforme allora vale la forza centrifuga:

$$F_c = \frac{mV^2}{R}$$

D'altronde la velocità in un moto circolare uniforme è:

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

Per cui applicando la proprietà transitiva abbiamo:

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

Ma per la terza legge di Keplero

$$T^2 = kr^3$$

Quindi abbiamo che:

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{kR^3}$$

La quale forza è suddivisibile in una parte variabile ed una costante:

$$F = \frac{m}{R^2} \underbrace{\frac{4\pi^2}{k}}_C = C \frac{m}{R^2}$$

Ma per il terzo principio della dinamica in C deve esserci la massa solare perché è una forza che il pianeta esercita sul sole moltiplicata per una costante.

$$C = \underbrace{G}_{\text{costante sole}} \underbrace{M}_{\text{massa sole}}$$

Sostituendo troviamo quindi

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

Che è la legge di gravitazione universale.

Il valore di G è:

$$G = 6,67 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg}$$

Il peso della terra

Come si è trovato il valore di G? Con una bilancia di torsione. È fatta di un filo metallico sottile sospeso a cui sono attaccate due piccole masse. Sul tavolo sono sistemate due masse molto grandi. Le masse piccole sono attratte dalle masse grandi. Bisogna calcolare l'angolo di rotazione. Il modo migliore per farlo è di misurare l'angolo di torsione. Lo si può fare con uno specchietto sul filo su cui un raggio di luce cade perpendicolarmente. Misurando l'angolo si può risalire a G sapendo che:

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

E possedendo tutti i dati tranne g.

Se F è la forza di attrazione gravitazionale, sulla terra è $F = mg$. Da questo possiamo ricavare il valore di della massa della terra.

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

Da qui troviamo

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

È stato trovato quindi da questo calcolo che la densità media è $\frac{M}{V} = 5,5 * 10^3$, molto superiore alla densità della superficie terrestre. Da qui si pensa che nel nucleo vi siano materiali più densi.

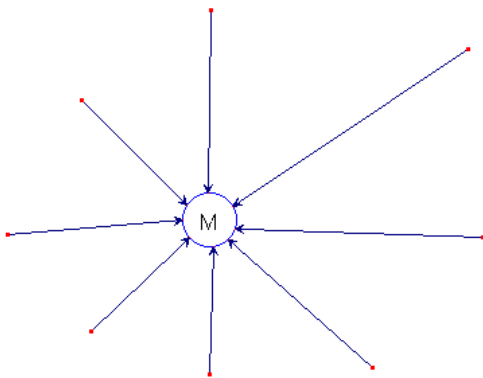
Il concetto di campo gravitazionale

Prima di Newton si pensava che le forze agissero in seguito ad un contatto. Newton sostituì questo concetto con quello di azione a distanza. Questo concetto rimase in carica fino al 1800.

Per determinare un vettore detto vettore campo gravitazionale di un punto ad una distanza la formula è:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ che ha come modulo } |\vec{g}| = \frac{GM}{r^2}$$

Essendo un vettore oltre al modulo dobbiamo parlare anche di direzione e verso.



In un campo come quello disegnato dove le linee di forza sono più dense il campo è maggiore. Un campo di questo tipo è detto radiale. La forza è sempre tangente alle linee di forza.

Analizziamo ora il campo gravitazionale terrestre:

$$g = G \frac{MT}{r^2}$$

Prendendo un punto P nello spazio ed un punto P0 sulla terra otteniamo che:

$$g = G \frac{MT}{(r_t + h)^2}; g_0 = G \frac{MT}{r_t^2} \text{ e che:}$$

$$\frac{g}{g_0} = \frac{r_t^2}{(r_t + h)^2} \rightarrow g = g_0 \frac{r_t^2}{(r_t + h)^2}$$

Facendo un grafico di r in variare dell'altezza otteniamo un'iperbole equilatera e che l'accelerazione di gravità diminuisce all'aumentare dell'altezza.

La forza di attrazione gravitazionale cresce all'aumentare della massa, ma cresce anche al diminuire del raggio. Se avessimo un oggetto di massa tendente a zero, l'accelerazione di gravità tenderebbe all'infinito.

Energia potenziale gravitazionale

Prima di parlare di energia potenziale gravitazionale dobbiamo verificare che la forza sia conservativa, ovvero che la variazione del lavoro sia nulla.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \alpha$$

Con $\alpha = 0$

$$L = FS$$

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

La forza è

La variazione del lavoro sarà quindi:

$$\Delta L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N$$

Dividendo il segmento AB nei vari punti:

$$L_1 = \vec{F}_{A1}(r_a - r_1)$$

$$L_2 = \vec{F}_{12}(r_1 - r_2)$$

$$L_3 = \vec{F}_{23}(r_2 - r_3)$$

...

$$L_N = \vec{F}_{AB}(r_n - r_B)$$

Facendo la media geometrica delle forze ottengo che:

$$\vec{F}_{A1} = \frac{GMm}{r_a r_1} \text{ ecc.}$$

Sommando fra loro tutti i vari fattori, mi accorgo che si elidono tutti tranne:

$$L_{AB} = \frac{GMm}{r_b} - \frac{GMm}{r_a} = GMm \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

E dipendendo solamente dalle distanze di A e B dal centro della terra, è conservativa, quindi.

$$L_{AB} = \Delta EC$$

La variazione di energia potenziale è quindi uguale a:

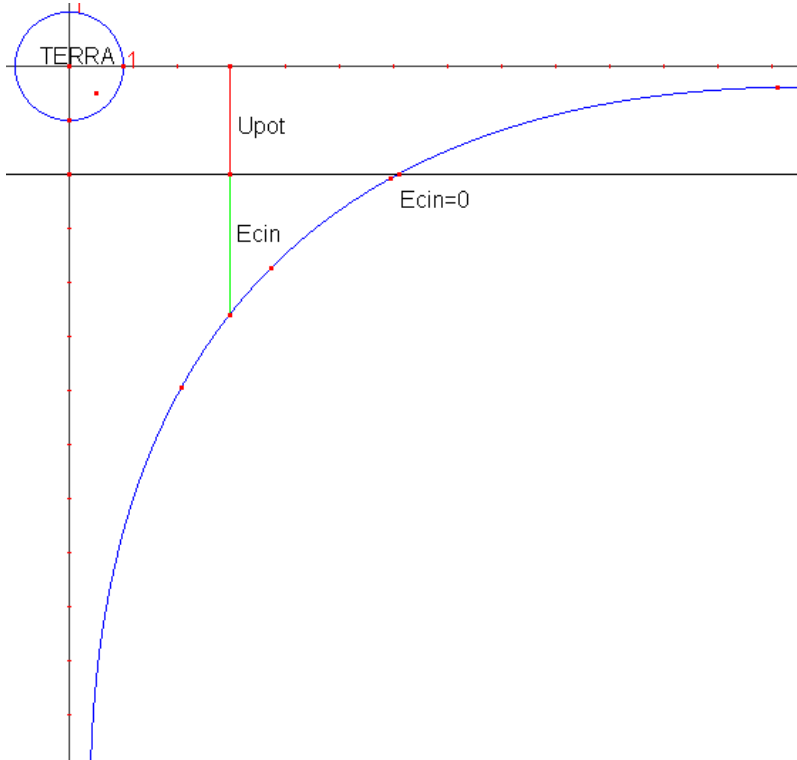
$$L_{AB} = -\Delta U = -\frac{GMm}{r}$$

L'energia potenziale è negativa, questo implica il fatto che il sistema sia un **sistema legato** in cui le sue particelle rimangono unite se sollecitato.

Supponiamo ora che l'energia totale meccanica del sistema:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Sia costante e negativa. Vediamo cosa comporta:



Se l'energia meccanica è negativa il corpo non può allontanarsi all'infinito e deve seguire un'orbita chiusa. Ad un satellite della terra deve essere assegnata una energia tale che l'energia cinetica sia negativa.

Sapendo che:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow E_{CIN} = \frac{GMm}{2r}$$

E quindi calcolando l'energia totale:

$$E_{Tot} = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

L'energia totale risulta negativa. L'energia cinetica è inferiore all'energia potenziale. Se l'energia totale meccanica fosse nulla allora l'orbita sarebbe parabolica con il sole in un fuoco, altrimenti iperbolica.

La velocità teorica di fuga di un satellite è

$$V_F = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Non dipende da cosa sto lanciando ma dal rapporto massa / raggio, la qual cosa dimostra che nemmeno la luce può sfuggire ad un buco nero.

La costante di Keplero

Proviamo ora a giungere alla costante di Keplero partendo dalla legge di Newton.

$$F = G \frac{mM}{R^2} = ma \text{ x il II principio della dinamica. In più se le orbite sono circolari è } a = \frac{v^2}{r}$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\text{Se il moto è circolare uniforme in più } v = \frac{2\pi * r}{t}$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m \frac{\left(\frac{2\pi * r}{t}\right)^2}{r}$$

Si ottiene quindi che:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi}{GM} \text{ e che quindi } k = \frac{4\pi}{GM}$$

I satelliti

Se volessimo mandare in orbita un satellite devo tener conto che l'orbita sarà differente a seconda della spinta. Supponiamo la terra piatta e calcoliamoci la velocità per spedire in orbita un satellite:

$$F_G = F_C$$

$$\frac{GM_t m_{sat}}{R_t^2} = \frac{m_{sat} V^2}{R_t}$$

Risolvendo rispetto a V:

$$V = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T}} = 7,81 \text{ Km/s}$$

La velocità non dipende dalla massa del satellite ma esclusivamente dalla massa della terra.

Un particolare caso sono i satelliti geostazionari per le telecomunicazioni, che devono essere allineati all'equatore, la cui distanza dalla terra è:

$$h = \sqrt[3]{G \frac{M_T T^2}{4\pi^2}} - R_t \cong 36.000 \text{ Km}$$

Tutti i satelliti geostazionari si trovano alla stessa distanza dalla terra.

Un'ultima questione è quella riguardo agli astronauti: se l'accelerazione in orbita esiste come mai non cadono sulla terra, ma li vediamo in assenza di gravità? Li vediamo in assenza di gravità poiché essendo la navicella un sistema di riferimento inerziale non rispetta le leggi della dinamica.